



# Magnitoelektrik tizimlar qurilmalarining dinamik xususiyatlarini baholash uchun chiziqli qayta ishlab chiqaruvchi tizimlarni o'rganishda vaqt usulidan foydalanish masallari

Oleksandr A. Sytnik<sup>1</sup>, Miraziz V. Sagatov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> t.f.n., prof., Cherkasi davlat texnologik universiteti, Cherkasi, Ukraina; <http://orcid.org/0000-0002-2741-9376>

<sup>2</sup> t.f.d., prof., Toshkent davlat texnika universiteti, Toshkent, 100095, O'zbekiston; [informtgu@mail.ru](mailto:informtgu@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8369-3866>

**Dolzarblik:** magnitoelektrik o'lchash tizimlaridan muvaffaqiyatli foydalanish uchun ularni dinamik ish rejimida aniqligini baholash qobiliyati juda muhim sanaladi. Bunday baholarni olish uchun an'anaviy ravishda chastota o'zgartirishiga asoslangan usullar va shunga mos ravishda o'zaro ta'sir qiluvchi magnit maydon va zanjirlarni toklarini spektral tashkil etuvchilarini tarkibini taxlili qo'llanildi. Shu bilan birga, chastotali usullar bir qator cheklovlarga ega, xususan, vaqtning davriy funktsiyalarini tahlil qilishda Furye qatorini xadlari cheklanganligi, shuningdek davriy bo'lmagan funktsiyalar uchun Furye integralidan foydalanishda boshqa cheklovlar. Bundan tashqari, mavjud majmualari spektral usul va tipik effektlar usulini qo'llashda bazi cheklovlar mavjud.

**Maqsad:** taqdim etilgan maqolada magnitoelektrik tizimlarning dinamik xususiyatlarini baholash uchun vaqtga asoslangan tadqiqot usulidan foydalanish imkoniyati ko'rib chiqilgan.

**Usullar:** Magnitoelektrik tizimlarni loyihalash va ishlatish bilan bog'liq dinamik aniqlik masalalarini hal qilish uchun chastota va vaqt tadqiqot usullarining qiyosiy tahlili o'tkazildi.

**Natijalar:** maqolada elektromagnit dempflingli magnitoelektrik o'lchash tizimining dinamik xususiyatlari tahlili keltirilgan, uni ushbu turdagi murakkabroq o'lchash tizimlariga tadbiiq qilish mumkin.

**Kalit so'zlar:** magnitoelektrik tizimlar, chastota usuli, vaqt usuli, differentsial tenglama, uzatish funktsiyasi, Gurvits barqarorlik shartlari, e.y.k. termpara.

**For citation:** OA. Sytnik, M.V. Sagatov. Issues of using the time method of studying linear reproducing systems for assessing dynamic properties of magnetolectric systems devices. Scientific and technical journal of Problems of Energy and Sources Saving, 2024, no. 4, pp. 164-175.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.14580822>

Received: 24.10.2024

Revised: 19.11.2024

Accepted: 12.12.2024

Published: 27.12.2024

**Copyright:** © Oleksandr A. Sytnik, Miraziz V. Sagatov, 2024. Submitted to Problems of Energy and Sources Saving for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

## Вопросы использования временного метода исследования линейных воспроизводящих систем для оценки динамических свойств приборов магнитоэлектрических систем

Олександр А. Сьтнік<sup>1</sup>, Міразіз В. Сагатов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> к.т.н., проф., Черкасский государственный технологический университет, Черкаси, Украина; <http://orcid.org/0000-0002-2741-9376>

<sup>2</sup> д.т.н., проф., Ташкентский государственный технический университет, Ташкент, 100095, Узбекистан; [informtgu@mail.ru](mailto:informtgu@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8369-3866>

**Актуальность:** для успешного использования магнитоэлектрических измерительных систем важным моментом является возможность оценки их точности в динамическом режиме работы. Для получения таких оценок традиционно используются методы, основанные на преобразованиях частоты и, соответственно, анализе состава спектральных составляющих токов взаимодействующей цепи и магнитного поля. В то же время частотные методы имеют ряд ограничений, в частности, из-за конечности числа членов ряда Фурье при анализе периодических функций времени, а также некоторых других ограничений при использовании интеграла Фурье для непериодических функций. Кроме того, существуют определенные ограничения при использовании известного комплексно-спектрального метода и метода типичных эффектов.

**Цель:** в представленной статье рассмотрена возможность использования временного метода исследования для оценки динамических свойств магнитоэлектрических систем.

**Методы:** сделан сравнительный анализ частотного и временного метода исследования для решения вопросов динамической точности связанных с конструированием и эксплуатацией магнитоэлектрических систем.

**Результаты:** в статье представлен анализ динамических свойств магнитоэлектрической измерительной системы с электромагнитным демпфированием, который может быть распространен на более сложные измерительные системы данного типа.

**Ключевые слова:** магнитоэлектрические системы, частотный метод, временной метод, дифференциальное уравнение, передаточная функция, условия устойчивости Гурвица, э.д.с. термпара.



# Issues of using the time method of studying linear reproducing systems for assessing dynamic properties of magnetoelectric systems devices

Oleksandr A. Sytnik <sup>1</sup>, Miraziz V. Sagatov <sup>2</sup>

<sup>1</sup> PhD in Technology, prof., Cherkasy State Technological University, Cherkasy, Ukraine; <http://orcid.org/0000-0002-2741-9376>

<sup>2</sup> DSc, prof., Tashkent State Technical University, Tashkent, 100095, Uzbekistan; [informtetu@mail.ru](mailto:informtetu@mail.ru); <https://orcid.org/0000-0001-8369-3866>

**Relevance:** for successful use of magnetoelectric measuring systems, an important point is the ability to evaluate their accuracy in a dynamic mode of operation. To obtain such estimates, methods based on frequency conversions and, accordingly, analysis of the composition of the currents of the interacting circuit and the magnetic field are traditionally used. At the same time, frequency methods have a number of limitations, in particular, due to the finiteness of the number of terms of the Fourier series in the analysis of periodic functions of time, as well as some other limitations when using the Fourier integral for non-periodic functions. In addition, there are certain limitations when using the well-known complex-spectral method and the method of typical effects.

**Aim:** the presented article considers the possibility of using the time-domain research method to assess the dynamic properties of magnetoelectric systems.

**Methods:** a comparative analysis of the frequency and time method of research is made to solve the issues of dynamic accuracy associated with the design and operation of magnetoelectric systems.

**Results:** the article presents an analysis of the dynamic properties of a magnetoelectric measuring system with electromagnetic damping, which can be extended to more complex measuring systems of this type.

**Keywords:** magnetoelectric systems, frequency method, time method, differential equation, transfer function, Hurwitz stability conditions, e.m.f. thermocouple.

## 1. Введение (Introduction)

При оценке динамической точности магнитоэлектрических систем (т.е. таких, функционирование которых основано на взаимодействии контура с током и магнитного поля) обычно используют частотный метод исследования линейных воспроизводящих систем [1, 2]. Этот метод исследования основан на предположении, что электрические токи (инициализирующие токи) протекающие через контур могут быть представлены как совокупность постоянно действующих синусоидальных составляющих.

Нетрудно прийти к выводу, что правомерность использования частотного метода ограничивается случаями, когда токи в контуре достаточно точно описываются периодическими функциями времени, а также функциями времени, выражаемыми интегралом Фурье [3,4].

Вместе с тем опыт показывает, что в конкретных физических примерах для точного описания токов в контуре, а, следовательно, и для оценки точности воспроизведения воздействий конкретным устройством перечисленных выше функций времени недостаточно. Недостаточно оказывается и функций времени, используемых в таких методах исследования магнитоэлектрических систем как комплексно-спектральный метод и метод типовых воздействий [5,6].

В связи с этим особый интерес представляет использование для оценки динамических свойств магнитоэлектрических систем временного метода исследования линейных воспроизводящих систем [7].

При этом методе исследования для описания воздействий используются функции времени  $\alpha_{ex}^k(t)$ , удовлетворяющие условию:

$$\left| \alpha_{ex}^k(t) \right| \begin{cases} = 0; & \text{при } -\infty \leq k \leq -0, \quad -\infty \leq k \leq +\infty, \\ \leq M \Omega^k; & \text{при } +0 \leq t \leq \infty, \quad -\infty \leq k \leq +\infty, \end{cases} \quad (1)$$

где  $M$  и  $\Omega$  – некоторые заданные вещественные положительные числа.

Совокупность функций времени, удовлетворяющих условию (1), в дальнейшем будем именовать классом функций  $S(M, \Omega)$ .

С практической точки зрения требуемое при временном методе определение параметров  $M$  и  $\Omega$  для класса воздействий, подлежащих воспроизведению, сопряжено, как правило, с меньшими трудностями, чем определение спектрального состава этих воздействий, требуемое в частотном и комплексно-спектральном методах, и определение типового воздействия, требуемое в методе типовых воздействий. Характерно, что при исследовании воспроизводящих свойств магнитоэлектрических систем для определения параметра  $\Omega$  в большинстве практических случаев может быть использовано соотношение



$$\Omega \approx \frac{|i^{(1)}(t)|_{\max \max}}{|i(t)|_{\max \max}},$$

где  $|i(t)|_{\max \max}$  – предельное значение модуля подлежащих исследованию токов в контуре при  $-\infty \leq t \leq +\infty$ ;  $|i^{(1)}(t)|_{\max \max}$  – предельное значение модуля скорости изменения во времени подлежащих исследованию токов в контуре при  $-\infty \leq t \leq +\infty$ .

## 2. Материалы и методы (Materials and Methods)

Главным предназначением магнитоэлектрических систем является, как известно, преобразование электрического тока, протекающего через некоторый контур,  $i_k(t)$ , в отклонение указателя, механически связанного с данным контуром с током на величину  $L(t)$ . Требуемый характер этого преобразования описывается либо уравнением:

$$L_0(t) = K(0)i_k(t), \quad (2)$$

выражающим идеальный процесс слежения, либо уравнением:

$$L_\tau(t) = K(0)i_k(t + \tau), \quad (3)$$

выражающим идеальный процесс регистрации.

В уравнениях (2) и (3):  $L_0(t)$  и  $L_\tau(t)$  – функции времени, описывающие требуемое воспроизведение воздействия  $i_k(t)$ ;  $K(0)$  – чувствительность устройства с магнитоэлектрическим узлом по постоянному току;  $\tau$  – допустимое время смещения регистрации исследуемых токов в контуре.

Очевидно, что фактическое воспроизведение воздействия  $i_k(t)$ , описываемое функцией времени  $L(t)$ , отличается как от  $L_0(t)$ , так и от  $L_\tau(t)$ . Взаимное отклонение функций времени  $L_0(t)$  и  $L(t)$  составляет мгновенную погрешность слежения устройства:

$$\Delta_0(t) = L(t) - L_0(t), \quad (4)$$

а взаимное отклонение функций времени  $L_\tau(t)$  и  $L(t)$  – мгновенную погрешность регистрации:

$$\Delta_\tau(t) = L(t) - L_\tau(t). \quad (5)$$

Функции  $\Delta_0(t)$  и  $\Delta_\tau(t)$  достаточно полно характеризуют динамические свойства магнитоэлектрической системы по отношению к току  $i_k(t)$ . При определении этих функций будем исходить из предположения, что взаимосвязь между  $L(t)$  и  $i_k(t)$  выражается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

В классической теории магнитоэлектрических систем [8] взаимосвязь между  $L(t)$  и  $i_k(t)$  выражается линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$L(t) + \frac{2s}{\omega_0} L^{(1)}(t) + \frac{1}{\omega_0^2} L^{(2)}(t) = K(0) i_k(t), \quad (6)$$

где  $s$  – степень успокоения подвижной системы контура с исследуемыми токами;  $\omega_0$  – собственная частота подвижной системы.

Вместе с тем тщательное исследование динамических свойств магнитоэлектрических систем, проведенное Р.Р. Харченко и Н.Н. Евтихиевым, показало, что для описания взаимосвязи между  $L(t)$  и  $i_k(t)$  необходимо использование линейных дифференциальных уравнений с порядками выше второго. Поэтому в данной работе для описания взаимосвязи между  $L(t)$  и  $i_k(t)$  используется линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$L(t) + \sum_{k=1}^n b_k L^{(k)}(t) = K(0) i_k(t), \quad (7)$$

порядок которого (число  $n$ ) сверху не ограничен.

Коэффициенты  $b_k$  в данном случае являются вещественными положительными числами, определяемыми конструктивными особенностями используемого магнитоэлектрического устройства.



Рассмотрим структуру решения дифференциального уравнения (7) для случая, когда инициализирующие токи  $i_k(t) \in S(M, \Omega)$ , а передаточная функция устройства:

$$K(p) = K(0) \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n b_k p^k}, \quad (8)$$

является аналитической функцией комплексного переменного внутри круга  $|p| < R_{\min}$  и вне круга  $|p| \leq R_{\max}$ . Связь между коэффициентами  $b_k$  и числами  $R_{\min}$  и  $R_{\max}$  устанавливается известной теоремой из высшей алгебры о границах нулей полиномов с вещественными коэффициентами [9].

**а) Инициализирующие токи**  $i_k(t) \in S(M, \Omega), \Omega < R_{\min}$

Можно доказать, что при  $\Omega < R_{\min}$  решение дифференциального уравнения (6) функция  $L(t)$  может быть представлена в виде суммы двух составляющих:

$$L(t) = L(t)_{\text{вын}} + L(t)_{\text{св}}. \quad (9)$$

Первая из этих составляющих вынужденная –  $L(t)_{\text{вын}}$ , обусловленная реакцией подвижной системы контура с током на плавные изменения во времени тока  $i_k(t)$  и его производных  $\{i_k^{(k)}(t)\}$ , определяется по формуле:

$$L(t)_{\text{вын}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} K^{(k)}(0) i_k^{(k)}(t), \quad (10)$$

$$K^{(k)}(0) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^k}{dp^k} K(p).$$

где

Вторая составляющая свободная –  $L(t)_{\text{св}}$ , обусловленная реакцией системы контура с током на скачкообразные изменения во времени тока  $i_k(t)$  и его производных  $i_k^{(k)}(t)$ , при  $t=0$ , может быть определена по формуле:

$$L(t)_{\text{св}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(s_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow -\beta_k} \frac{d^k}{dp^k} [K(p) I_k(p) (p + \beta_k)^{s_k} e^{pt}], \quad (11)$$

где  $N$  – число полюсов передаточной функции магнитоэлектрической системы  $K(p)$ ;  $\beta_k$  –  $k$ -ый полюс  $s_k$ -ого порядка  $K(p)$ ;  $I_k(p)$  – изображение (по Лапласу) инициализирующего тока  $i_k(t)$

Из возможности разделения на составляющие  $L(t)$  вытекает возможность разделения на составляющие  $\Delta_\tau(t)$  и  $\Delta_0(t)$ . Очевидно, что:

$$\Delta_0(t)_{\text{вын}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} K^{(k)}(0) i_k^{(k)}(t), \quad (12)$$

$$\Delta_\tau(t)_{\text{вын}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} [K^{(k)} - {}_{(0)}K(1) {}_{(0)}^k K^{-k+1} {}_{(0)}] i_k^{(k)}(t), \quad (13)$$

$$\Delta_0(t)_{\text{св}} = \Delta_\tau(t)_{\text{св}} = L(t)_{\text{св}}. \quad (14)$$

Приведенные формулы позволяют провести оценку предельных значений  $|\Delta_0(t)_{\text{вын}}|_{\max \max}$ ,  $|\Delta_\tau(t)_{\text{вын}}|_{\min \max}$  и  $|L(t)_{\text{св}}|_{\max \max}$  для токов  $i_{uu}(t) \in S(M, \Omega); \Omega < R_{\min}$  при  $-\infty < t \leq +\infty$ .

Следует отметить, что для магнитоэлектрических систем, являющихся заведомо устойчивыми системами, наибольший интерес с практической точки зрения представляют оценки предельных значений  $|\Delta_0(t)_{\text{вын}}|$  и  $|\Delta_\tau(t)_{\text{вын}}|$ .

Для оценки предельных значений  $|\Delta_0(t)_{\text{вын}}|$  и  $|\Delta_\tau(t)_{\text{вын}}|$  воспользуемся неравенствами

$$|i_{uu}^{(k)}(t)| \leq M \Omega^k, \quad 0 \leq k \leq \infty,$$

вытекающими из условия (1). Приведенные неравенства позволяют записать, что при  $-\infty < t \leq +\infty$ :



$$|\Delta_0(t)_{\text{вын}}| \leq K(0)M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left| \frac{K^{(k)}(0)}{K(0)} \right| \Omega^k, \quad (15)$$

$$|\Delta_{\tau}(t)_{\text{вын}}| \leq K(0)M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left| \frac{K^{(k)}(0)}{K(0)} - \left( \frac{K^{(1)}(0)}{K(0)} \right)^k \right| \Omega^k. \quad (16)$$

Анализ оценки (15) показывает, что минимальные значения  $|\Delta_0(t)_{\text{вын}}|_{\max \max}$  для токов  $i_u(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega < R_{\min}$  имеют место при минимальных значениях коэффициентов  $\left\{ \frac{K^{(k)}(0)}{K(0)} \right\}$  или, то же самое, при минимальных значениях коэффициентов  $b_k$  и отношения  $\frac{\Omega}{R_{\min}}$ .

В свою очередь из оценки (16) следует, что для токов  $i_u(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega < R_{\min}$  минимальные значения  $|\Delta_{\tau}(t)_{\text{вын}}|_{\max \max}$  имеют место при минимальных значениях коэффициентов  $\left\{ \left| \frac{K^{(k)}(0)}{K(0)} - \left( \frac{K^{(1)}(0)}{K(0)} \right)^k \right| \right\}$ , что в частности, обеспечивается при выполнении соотношений:

$$\begin{cases} b_2 = \frac{1}{2!} b_1^2; \\ \dots\dots\dots; \\ b_n = \frac{1}{n!} b_1^n, \end{cases} \quad (17)$$

когда для  $2 \leq k \leq n$  :

$$\left| \frac{K^{(k)}(0)}{K(0)} - \left( \frac{K^{(1)}(0)}{K(0)} \right)^k \right| = 0$$

Для дифференциального уравнения (6), используемого в классической теории устройств использующих магнитоэлектрический принцип, условия минимизирования  $|\Delta_{\tau}(t)_{\text{вын}}|_{\max \max}$  устанавливаемые соотношениями (17), сводятся к равенству:

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{2!} \left( \frac{2s}{\omega_0} \right)^2,$$

что соответствует  $s = (\sqrt{2})^{-1}$  или  $1/\sqrt{2}$ .

Необходимо отметить, что при  $n \geq 5$  магнитоэлектрические системы, удовлетворяющие

условиям (17), физически неосуществимы, т.к. при  $n \geq 5$  полином  $b(p) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} b_1^k p^k$  не удовлетворяет условиям устойчивости Гурвица [10, 11].

С практической точки зрения, использование неравенства (15) и (16) для оценки динамической точности магнитоэлектрической системы нецелесообразно. Это объясняется, прежде всего, известными трудностями суммирования бесконечных рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left| \frac{K^{(k)}(0)}{K(0)} \right| \Omega^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left| \frac{K^{(k)}(0)}{K(0)} - \left( \frac{K^{(1)}(0)}{K(0)} \right)^k \right| \Omega^k,$$

представляющих оценки сверху модулей функций  $\varepsilon_0(p) = \frac{K(p)}{K(0)} - 1$  и  $\varepsilon_{\tau}(p) = \frac{K(p)}{K(0)} - e^{\frac{K^{(1)}(0)}{K(0)} p}$  соответственно в круге  $|p| \leq \Omega < R_{\min}$ .

В этой связи целесообразно для оценки предельных значений  $|\Delta_0(t)_{\text{вын}}|$  и  $|\Delta_{\tau}(t)_{\text{вын}}|$  пользоваться неравенствами:

$$|\Delta_0(t)_{\text{вын}}| \leq K(0)M \eta_i(\Omega), \quad (18)$$

$$|\Delta_{\tau}(t)_{\text{вын}}| \leq K(0)M \varphi_i(\Omega), \quad (19)$$

где  $\eta_i(\Omega)$  и  $\varphi_i(\Omega)$  – достаточно просто вычисляемые мажоранты рядов:



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left| \frac{K^{(k)}(0)}{K(0)} \right| \Omega^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left| \frac{K^{(k)}(0)}{K(0)} - \left( \frac{K^{(1)}(0)}{K(0)} \right)^k \right| \Omega^k.$$

Можно доказать [7], что в качестве мажоранты  $\eta_i(\Omega)$  может быть использована функция:

$$\eta_i(\Omega) = \frac{\sum_{k=1}^n b_k \Omega^k}{1 - \sum_{k=1}^n b_k \Omega^k},$$

а в качестве мажоранты  $\varphi_i(\Omega)$  – функция:

$$\varphi_i(\Omega) = \eta_i(\Omega) + e^{b_1 \Omega} - 1 - 2b_1 \Omega.$$

Из неравенств (18) и (19) следует, что для магнитоэлектрического устройства, характеризуемого дифференциальным уравнением (7), достаточным условием регистрации инициализирующего тока  $i_{\kappa}(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega < R_{\min}$  с масштабом воспроизведения  $K(0)$ , временем смещения  $\tau = \frac{K^{(1)}(0)}{K(0)} = -b_1$  и предельными значениями  $|\Delta_0(t)_{\text{вын}}|$  и  $|\Delta_{\tau}(t)_{\text{вын}}|$ , не превышающими при  $-\infty \leq t \leq +\infty$  некоторых чисел  $\bar{\Delta}_0$  и  $\bar{\Delta}_{\tau}$ , является выполнение соотношений:

$$K(0)M\eta_i(\Omega) \leq \bar{\Delta}_0 \quad (20)$$

и

$$K(0)M\varphi_i(\Omega) \leq \bar{\Delta}_{\tau}, \quad (21)$$

при  $0 \leq \Omega < R_{\min}$ .

Анализ функций  $\eta_i(\Omega)$  и  $\varphi_i(\Omega)$  показывает, что при достаточно малых значениях  $\Omega R_{\min}^{-1}$  влияние коэффициентов  $b_k$ ,  $2 < k \leq n$  на характер этих функций крайне незначительно.

Это позволяет при регистрации инициализирующих токов  $i_{\kappa}(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega < R_{\min}$  для оценки предельных значений  $|\Delta_0(t)_{\text{вын}}|$  и  $|\Delta_{\tau}(t)_{\text{вын}}|$ , использовать соотношения:

$$|\Delta_0(t)_{\text{вын}}| \leq K(0)M \frac{2s \frac{\Omega}{\omega_0} + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}{1 - 2s \frac{\Omega}{\omega_0} - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} = K(0)M \varepsilon_0 \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right) \quad (22)$$

и

$$|\Delta_{\tau}(t)_{\text{вын}}| \leq K(0)M \left[ \varepsilon_0 \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right) + e^{2s \frac{\Omega}{\omega_0}} - 1 - 4s \frac{\Omega}{\omega_0} \right] = K(0)M \varepsilon_{\tau} \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right), \quad (23)$$

выводимые из дифференциального уравнения (6).

Для оценки интенсивности затухания  $L(t)_{ce}$  в рассматриваемом случае может быть использовано соотношение:

$$|L(t)_{ce}| \leq K(0)M \frac{e^{-s\omega_0 t}}{\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_0}\right) \sqrt{|1 - s^2|}} = K(0)M \varepsilon \left( \frac{\Omega}{\omega_0}, t \right). \quad (24)$$

Графики функций  $\varepsilon_0 \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right)$ ;  $\varepsilon_{\tau} \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right)$  и  $\varepsilon \left( \frac{\Omega}{\omega_0}, t \right)$  для различных значений  $s$  приведены на рис.1-3.

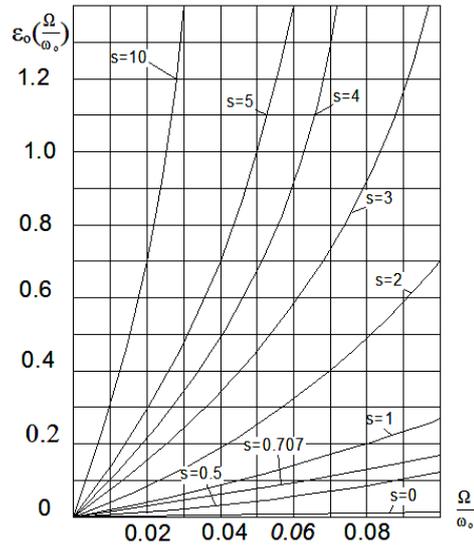


Рис.1. График функции  $\varepsilon_0\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)$

Fig.1. Graphic of  $\varepsilon_0\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)$  function

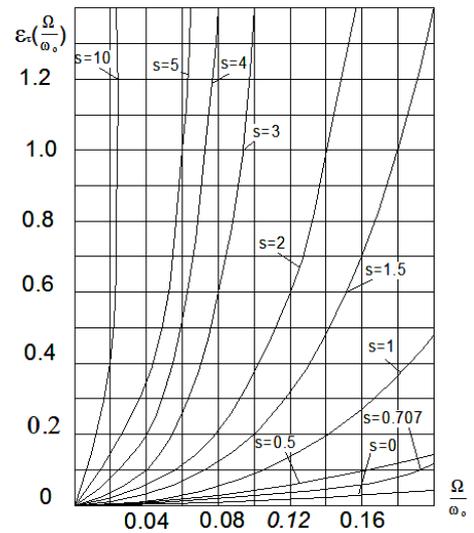


Рис.2. График функции  $\varepsilon_\tau\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)$

Fig.2. Graphic of  $\varepsilon_\tau\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)$  function

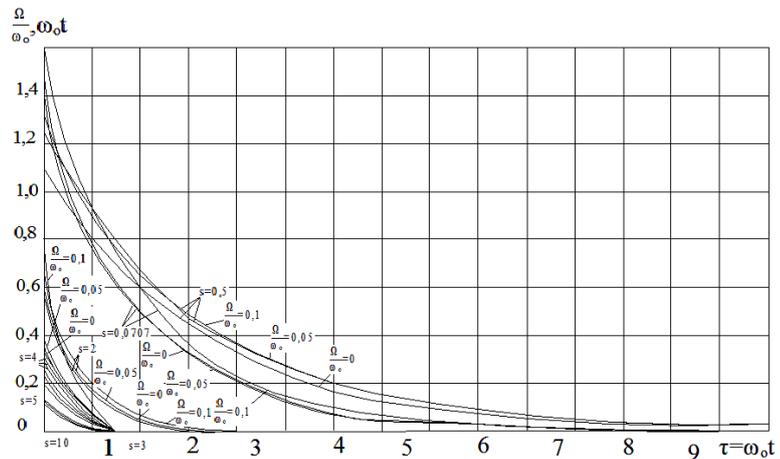


Рис. 3. График функции  $\varepsilon\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right), t$

Fig.3. Graphic of  $\varepsilon\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right), t$  function



Из этих графиков следует, что контур с током, характеризуемый дифференциальным уравнением (6) при  $K(0)=2$  мм/мА,  $\omega_0 = 500$  Гц и  $s=0,5$  даст возможность отобразить инициализирующий ток  $i_k(t) \in S(M_1, \Omega)$ ,  $M=100$  мА,  $\Omega = 25 c^{-1}$  с предельным значением  $|\Delta_0(t)_{вын}|$ , не превышающим  $2 \times 100 \times 0,05 = 10$  мм, и предельным значением  $|\Delta_\tau(t)_{вын}|$ , не превышающим  $2 \times 100 \times 0,01 = 2$  мм (при  $\tau = -0,002$  с). Предельной мажорантой  $|\Delta(t)_{св}|$  в данном случае будет функция:

$$K(0)M\varepsilon\left(\frac{\Omega}{\omega_0}, t\right) = 275 e^{-25t}.$$

Отметим, что к токам  $i_k(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $M=100$  мА,  $\Omega = 25 c^{-1}$  относятся, в частности, токи  $i_{1k}(t) = 100 \sin 25t$ ;  $i_{2k}(t) = 100 e^{-25t}$  и т.д.

В тех случаях, когда известны амплитудно-частотная характеристика магнитоэлектрической системы  $M^{(\omega)}$  и его фазочастотная характеристика  $\varphi(\omega)$ , для оценки предельных значений  $|\Delta_0(t)_{вын}|$ , и  $|\Delta_\tau(t)_{вын}|$ , при отображении инициализирующих токов  $i_{ui}(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega < R_{\min} \leq \omega_{кр}$  могут быть использованы соотношения:

$$\Delta_0(t)_{вын} \cong M(0)M|\varphi^{(1)}(0)|\Omega, \quad (25)$$

$$|\Delta_\tau(t)_{вын}| \cong M(0)M\left|\frac{M(\Omega)}{M(0)} - 1\right|. \quad (26)$$

Получаемые за счет подстановки в неравенства (20) и (17) соотношений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left| \frac{K^{(k)}(0)}{K(0)} \right| \Omega^k > \frac{1}{1!} \left| \frac{K^{(1)}(0)}{K(0)} \right| \Omega,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left| \frac{K^{(k)}(0)}{K(0)} - \left( \frac{K^{(1)}(0)}{K(0)} \right)^k \right| \Omega^k > \frac{1}{2!} \left| \frac{K^{(2)}(0)}{K(0)} - \left( \frac{K^{(1)}(0)}{K(0)} \right)^2 \right| \Omega^2,$$

а также доказанных в [8] соотношений:

$$\frac{K^{(1)}(0)}{K(0)} = \varphi^{(1)}(0),$$

$$M(\Omega) \cong M(0) + \frac{1}{2!} M^{(2)}(0) \Omega^2, \quad \frac{1}{2!} M^{(2)}(0) = \frac{1}{2!} \left| K^{(2)}(0) - \frac{K^{(1)2}(0)}{K(0)} \right|.$$

**б) Инициализирующие токи**  $i_k(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega > R_{\max}$

Можно доказать, что при  $\Omega > R_{\max}$ , возможно представление  $L(t)$  в виде суммы двух составляющих:  $L(t) = L(t)_{вын} + L(t)_{св}$

сохраняется. Сохраняется также возможность определения  $L(t)_{св}$  по формуле (11). Вместе с тем для определения  $L(t)_{вын}$  формула (10) оказывается не пригодной.

При  $\Omega < R_{\max}$ ,  $L(t)_{вын}$  определяется так:

$$L(t)_{вын} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Q^{(k)}(0) i_{ui}^{(-k)}(t),$$

$$Q^{(k)}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^k}{dz^k} K(z^{-1}), \quad \text{а} \quad i_k^{(-k)}(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t i_k(\tau) (t-\tau)^{k-1} d\tau$$

в том случае, если:



$$K(p) = K(0) \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n b_k p^k},$$

при  $k \leq n$ ,  $Q^{(k)}(0) = 0$ , следовательно,

$$L(t)_{\text{вын}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q^{(k)}(0) i_k^{(-k)}(t). \quad (27)$$

Анализ формулы (27) показывает, что по отношению к токам в контуре  $i_k(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega > R_{\min}$  магнитоэлектрическая система, характеризуемая дифференциальным уравнением (7), проявляет себя как «непрозрачная» система с вынужденной составляющей погрешности «подавления» воздействий  $\delta(t)_{\text{вын}}$ , определяемой по формуле:

$$\delta(t)_{\text{вын}} = L(t)_{\text{вын}}.$$

Из формулы (27) также вытекает возможность использования исследуемой магнитоэлектрической системы для  $(n+1+q)$  – краткого интегрирования токов  $i_k(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega > R_{\max}$  с

масштабом  $\frac{1}{(n+1+q)!} Q^{(n+1+q)}(0)$  и вынужденной составляющей погрешности интегрирования  $j(t)_{\text{вын}}$ , определяемой по формуле:

$$j(t)_{\text{вын}} = L(t)_{\text{вын}} - \frac{1}{(n+1+q)!} Q^{(n+1+q)}(0) i_{\text{ш}}^{(n+1+q)}(t).$$

Оценка предельных значений  $|\delta(t)_{\text{вын}}|$  и  $|j(t)_{\text{вын}}|$  для токов в контуре  $i_k(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega > R_{\max}$  может быть произведена аналогичными методами оценки предельных значений  $|\Delta_0(t)_{\text{вын}}|$  и  $|\Delta_r(t)_{\text{вын}}|$  для токов  $i_k(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega < R_{\min}$ .

### в) Инициализирующие токи $i_k(t) \in S(M, \Omega)$ , $R_{\min} \leq \Omega \leq R_{\max}$ .

При  $R_{\min} \leq \Omega \leq R_{\max}$  разделение  $L(t)$  на вынужденную и свободную составляющие в общем случае невозможно. Это объясняется тем, что среди токов в контуре  $i_k(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $R_{\min} \leq \Omega \leq R_{\max}$  имеются такие, которые способны привести подвижную систему контура магнитоэлектрической системы в состояние обобщенного резонанса, явления, впервые описанного С. П. Стрелковым. Частным случаем является общеизвестный резонанс, возникающий при протекании через контур магнитоэлектрической системы синусоидальных токов, частота которых совпадает с собственными частотами подвижной системы контура с током.

### 3. Результаты исследования (Results)

В проведенном выше анализе свойств магнитоэлектрической системы допускалось, что характер передаточной функции устройства определяется только его конструктивными параметрами и совершенно не зависит от параметров электрической схемы устройства.

Однако, указанное допущение правомерно лишь в тех случаях, когда влияние э.д.с., генерируемых в контуре с током, на свойства магнитоэлектрической системы практически незаметно. Оно правомерно, в частности, при анализе свойств магнитоэлектрических систем с одновитковыми контурами с масляным и магнитоиндуктивным демпфированием. Вместе с тем для многовитковых контуров с электромагнитным демпфированием указанное выше допущение в общем случае неравномерно.

В качестве примера, проанализируем свойства магнитоэлектрической системы с электромагнитным демпфированием при использовании его для исследования э.д.с. термопары.

Пусть  $e_T(t)$  – подлежащая исследованию э.д.с. термопары;  $r_T$  – омическое сопротивление термопары;  $e_k(t)$  – э.д.с. генерируемая контуром;  $r_k$  – омическое сопротивление шлейфа;  $r_\delta$  – демпфирующее сопротивление шлейфа (шунт).

Для рассматриваемого случая, взаимосвязь между  $i_k(t)$ ,  $e_T(t)$ , и  $e_k(t)$  выражается уравнением :



$$i_k(t) = \frac{r_\delta e_T(t) + (r_T + r_\delta) e_k(t)}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta}. \quad (28)$$

Предположим, что:

$$e_u(t) = -k_{ген} L^{(1)}(t), \quad (29)$$

где  $k_{ген}$  – конструктивная постоянная контура с током, и

$$i_u(t) = \frac{1}{K(0)} \left\{ L(t) + \sum_{k=1}^n b_k L^{(k)}(t) \right\} \quad (30)$$

в соответствии с дифференциальным уравнением (7) без учета эффекта электромагнитного демпфирования контура с током за счет генерируемой им э.д.с. Подставляя развернутые выражения для  $e_k(t)$  (29) и  $i_k(t)$  (30) в уравнения (28), можем записать, что :

$$\frac{K(0)r_\delta e_T(t)}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta} = L(t) + \left( b_1 + \frac{k_{ген} K(0)(r_T + r_\delta)}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta} \right) L^{(1)}(t) + \sum_{k=2}^n b_k L^{(k)}(t). \quad (31)$$

Это означает, что передаточной функцией магнитоэлектрической системы по отношению к э.д.с. термопары является дробнорациональная функция:

$$N(p) = \frac{K(0)r_\delta}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta} \times \frac{1}{1 + \left( b_1 + \frac{k_{ген} K(0)(r_T + r_\delta)}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta} \right) p + \sum_{k=2}^n b_k p^k}.$$

Пусть подлежащая исследованию э.д.с. термопары  $i_k(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega > R'_{\min}$ , где  $R'_{\min}$  – радиус сходимости ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N^{(k)}(0) p^k = N(p).$$

По аналогии с предыдущим можно утверждать, что в рассматриваемом случае воздействия  $i_k(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega < R'_{\min}$ , воспроизведутся магнитоэлектрической системой с масштабом воспроизведения:

$$N(0) = \frac{K(0)r_\delta}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta},$$

временем смещения  $\tau = - \left( b_1 + \frac{k_{ген} K(0)(r_T + r_\delta)}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta} \right)$  и предельными значениями  $|\Delta_0(t)_{вын}|$  и  $|\Delta_\tau(t)_{вын}|$ , оцениваемыми неравенствами:

$$|\Delta_0(t)_{вын}| \leq \frac{K(0)r_\delta M}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta} \eta'_1(\Omega) \quad (32)$$

и

$$|\Delta_\tau(t)_{вын}| \leq \frac{K(0)r_\delta M}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta} \phi'_1(\Omega), \quad (33)$$

где

$$\eta'_1(\Omega) = \frac{\left| b_1 + \frac{k_{ген} K(0)(r_T + r_\delta)}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta} \right| \Omega + \sum_{k=1}^n b_k \Omega^k}{1 - \left| b_1 + \frac{k_{ген} K(0)(r_T + r_\delta)}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta} \right| \Omega - \sum_{k=1}^n b_k \Omega^k},$$

$$\phi'_1(\Omega) = \eta'_1(\Omega) + e^{\eta^{(1)}(0)\Omega} - 1 - 2\eta^{(1)}(0).$$

При регистрации э.д.с. термопары  $e_T(t) \in S(M, \Omega)$ ,  $\Omega \ll R'_{\min}$ , условием минимизации предельного значения  $|\Delta_0(t)_{вын}|$  является выполнение соотношения:

$$b_1 + \frac{k_{ген} K(0)(r_T + r_\delta)}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta} = 0 \quad (34)$$

и соотношений

$$b_k = 0, \text{ при } 2 \leq k \leq n. \quad (35)$$



Условием минимизирования предельного значения  $|\Delta_\tau(t)_{\text{вын}}|$  в рассматриваемом случае является выполнение соотношений:

$$b_k = \frac{1}{k!} \left[ b_1 + \frac{k_{\text{ген}} K(0)(r_T + r_\delta)}{r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta} \right]^k, \quad \text{при } 2 \leq k \leq n. \quad (36)$$

#### 4. Обсуждение (Discussion)

Анализ дифференциального уравнения (31), неравенств (32) и (33), а также условий минимизирования предельных значений  $|\Delta_0(t)_{\text{вын}}|$  и  $|\Delta_\tau(t)_{\text{вын}}|$ , показывает, что использование эффекта электромагнитного демпфирования контура с током, повышая в

$$\left[ 1 + \frac{k_{\text{ген}} K(0)(r_T + r_\delta)}{(r_k r_\delta + r_k r_T + r_T r_\delta) b_1} \right]$$

раз интенсивность затухания  $L(t)_{\text{св}}$ , приводит вместе с тем к увеличению времени смещения  $\tau$  и предельного значения  $|\Delta_0(t)_{\text{вын}}|$ . Из условий (36) следует, в частности, что для контуров с током, характеризуемых дифференциальным уравнением (6), динамическая коррекция магнитоэлектрической системы с целью уменьшения предельного значения  $|\Delta_\tau(t)_{\text{вын}}|$  имеет место при:

$$\frac{r_T r_\delta}{r_T + r_\delta} = \frac{k_{\text{ген}} K(0) \omega_0}{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}s)} - r_k, \quad (37)$$

в тех случаях, когда  $r_T \gg r_\delta$  условие (37) сводится к соотношению:

$$r_\delta \approx \frac{k_{\text{ген}} K(0) \omega_0}{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}s)} - r_k. \quad (38)$$

При сопротивлении терморпары  $r_\delta = \frac{k_{\text{ген}} K(0) \omega_0}{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}s)} - r_k$  динамическая коррекция магнитоэлектрической системы с целью уменьшения предельного значения  $|\Delta_\tau(t)_{\text{вын}}|$  обеспечивается при отсутствии  $r_\delta$  (т.е. при  $r_\delta = \infty$ ).

Аналогичным образом могут быть исследованы свойства более сложных измерительных устройств, в которых магнитоэлектрические системы используются в качестве регистрирующих органов.

#### 5. Заключение (Conclusions)

Таким образом, показана возможность использования временного метода для решения вопросов динамической точности, связанных с конструированием и эксплуатацией магнитоэлектрических систем, а также различного рода измерительных устройств, в которых контуры с током в составе магнитоэлектрической системы используются в качестве регистрирующих органов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Верлань, С. Москалюк. Математическое моделирование непрерывных динамических систем / Отв. ред. Пухов Г.Е. АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике. – Киев: Наук. думка, 1988. – 288 с.
2. A. Verlan and M. Sagatov. Inverse problems of the dynamics of observation interpretation systems 2021 J. Phys.: Conf. Ser. 2131 032109, [Online]. Available: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2131/3/032109>.
3. A. Sytnik, K. Klyuchka, and S. Protasov "Development of the Method for Creating Explicit Integral Dynamic Models of Measuring Transducers." Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, vol. 5, no. 4, 2017, pp. 40-48. [Online]. Available: doi:10.15587/1729-4061.2017.1111444.
4. A. Verlan, V. Fedorchuk, and J. Sterten. "Using Non-linear Integral Models in Automatic Control and Measurement Systems for Sensors' Input Signals' Recovery". 11th World Conference



“Intelligent System for Industrial Automation” (WCIS-2020). Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1323. Springer, Cham. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-68004-6\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-68004-6_3).

5. Z. Bubnicki. Modern Control Theory. – Publisher: Springer, 424 p, 2005. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/3-540-28087-1>.

6. I. Nagrath. Control Systems Engineering. 2005, 858 p.

7. W. Levine. The Control Handbook: Control System Fundamentals, Second Edition.. 2017, pp. 1–786. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1201/b10383>.

8. А. Щепетов. Основы проектирование приборов и систем. – М.:Академия, 2019. –458 с.

9. А. Курош. Курс высшей алгебры. Учебник для вузов. – Издатель: Лань, 2020. – 432 с.

10. И. Кузмицкий и Г. Кулаков. Теория автоматического управления: учебник. Минск: БГТУ, 2010. – 572 с.

11. G. Kulakov and K. Artsiomenka. “Compare of Transient Quality in Automatic Control Systems with Classic PID Algorithm and Optimal Regulator.” ENERGETIKA. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations. 2019; vol. 62(2), 192-200pp. [Online]. Available: <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-2-192-200>.

## REFERENCES

1. A. Verlan and S. Moskalyuk. Mathematical modeling of continuous dynamic systems. – Ed. Pukhov G.E. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Institute of Modeling Problems in Power Engineering. – Kyiv: Nauk. Dumka, 1988. – 288 p. (In Russ.)

2. A. Verlan and M. Sagatov. Inverse problems of the dynamics of observation interpretation systems 2021 J. Phys.: Conf. Ser. 2131 032109, [Online]. Available: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2131/3/032109>.

3. A. Sytnik, K. Klyuchka, and S. Protasov. Development of the Method for Creating Explicit Integral Dynamic Models of Measuring Transducers. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, vol. 5, no. 4, 2017, pp. 40-48. [Online]. Available: doi:10.15587/1729-4061.2017.111444.

4. A. Verlan, V. Fedorchuk, and J. Sterten. Using Non-linear Integral Models in Automatic Control and Measurement Systems for Sensors’ Input Signals’ Recovery. 11th World Conference “Intelligent System for Industrial Automation” (WCIS-2020). Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1323. Springer, Cham. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-68004-6\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-68004-6_3).

5. Z. Bubnicki. Modern Control Theory. – Publisher: Springer, 424 p, 2005. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/3-540-28087-1>.

6. I. Nagrath. Control Systems Engineering. 2005, 858 p.

7. W. Levine. The Control Handbook: Control System Fundamentals, Second Edition. 2017, pp. 1–786. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1201/b10383>.

8. А. Shchepetov. Fundamentals of designing devices and systems. – М.: Academy, 2019. – 458 p. (In Russ.).

9. А. Kurosh. Higher algebra course. Textbook for universities. – Published by: Lan, 2020. – 432 p. (In Russ.).

10. I. Kuzmitsky and G. Kulakov. Automatic control theory: textbook. Minsk: BSTU, 2010. – 572 p. (In Russ.).

11. G. Kulakov and K. Artsiomenka. “Compare of Transient Quality in Automatic Control Systems with Classic PID Algorithm and Optimal Regulator.” ENERGETIKA. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations. 2019; vol. 62(2), 192-200pp. [Online]. Available: <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-2-192-200>.